
١. [section] تعريف

فهرست مطالب

۱	نمایش اعداد و خطا	۱
۱	۱.۱ نمایش اعداد	۱
۲	۱.۱.۱ ارقام بامعنی و ارقام بامعنی درست	۲
۳	۲.۱ تقریب یک عدد و اندازه خطای آن	۳
۳	۱.۲.۱ تقریب یک عدد	۳
۳	۲.۲.۱ خطای تقریب	۳

فصل ۱

نمایش اعداد و خطا

۱.۱ نمایش اعداد

اعداد به دو شکل ممیز ثابت و ممیز شناور قابل نمایش هستند. در شکل نمایش ممیز ثابت، تعداد ارقام قبل و بعد از ممیز، ثابت می‌باشد.

تعریف ۱

[دقت ماشین] ماکزیمم تعداد ارقامی است که ماشین بطور دقیق قادر به نمایش آنها می‌باشد ماکزیمم تعداد ارقامی است که ماشین بطور دقیق قادر به نمایش آنها می‌باشد

فرض کنیم تعریف ۱ تعداد ارقام قبل و بعد از ممیز عدد $A = ۳۲/۴$ به ترتیب برابر ۴ و ۲ باشد. از این‌رو، نمایش ممیز ثابت این عدد برابر $A = ۰۰۳۲/۴۰$ است.

چند عدد و نمایش ممیز شناور آنها در زیر آمده است:

$$\text{الف)} \quad A = ۳۲/۴ = ۰/۳۲۴ \times ۱۰^۲ = ۰/۰۳۲۴ \times ۱۰^۳ = ۰/۰۰۳۲۴ \times ۱۰^۴,$$

$$\text{ب)} \quad A = -۰/۰۰۲۴ = -۰/۰۰۲۴ \times ۱۰^۰ = -۰/۲۴ \times ۱۰^{-۲}.$$

به مثال زیر توجه کنید ([؟]): آونگ ساده‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که با نخ به طول L به تکیه‌گاهی آویزان است و به اندازه زاویه θ از حالت عمودی منحرف شده است (شکل (؟؟)). برای تعیین مدل ریاضی مسئله، از مقاومت هوا و اصطکاک بین نخ و آویز صرف‌نظر می‌کنیم.

حل

۱.۱.۱ ارقام بامعنی و ارقام بامعنی درست

تعریف ۲

(ارقام بامعنی) ارقام بامعنی یک عدد ناصفر A ، همان ارقام بامعنی ماننيس A یعنی b تعریف می‌شوند که ارقام بامعنی b عبارتند از ارقام مخالف صفر b ، صفرهای بین این ارقام ناصفر و صفرهایی که بعد از آخرین رقم ناصفر برای نشان دادن دقت قرار می‌گیرند.

تعداد ارقام بامعنی چند عدد در زیر آمده است:

۴ معنی‌دار رقم $A = 2/001 = 0/2001 \times 10^1 = 0/2001 \times 10^2$, (الف)

۷ معنی‌دار رقم $A = 2/044365 = 0/2044365 \times 10^1$, (ب)

۸ معنی‌دار رقم $A = -354/01100 = -0/35401100 \times 10^3$, (ج)

آیا دقت یک تقریب به تعداد ارقام بامعنی آن عدد بستگی دارد؟

تعریف ۳

(ارقام بامعنی درست) فرض کنید $a \neq 0$ تقریبی از عدد حقیقی ناصفر A باشد و

$$|a| = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots, \quad (1.1)$$

که $a_m \neq 0$ برای $m \in \mathbb{Z}$ و $0 \leq a_i \leq 9$ به ازای $i = m, m-1, \dots$ اعدادی صحیح باشند. اگر s تعداد ارقام بامعنی a باشد، آنگاه، بزرگترین عدد صحیح نامنفی n که $n \leq s$ و در نامساوی

$$|A - a| \leq 5 \times 10^{m-n}, \quad (2.1)$$

صدق کند، تعداد ارقام بامعنی درست a نامیده می‌شود. اگر $n > s$ ، آنگاه تعداد ارقام بامعنی درست a ، همان تعداد ارقام بامعنی a یعنی s است.

تعداد ارقام بامعنی درست تقریب‌های زیر را مشخص کنید:

(الف) $A = 2$, $a = 2/001$,

که ۲.۱ بنابراین $m = 0$ از طرفی،

اگر دو عدد a_1 و a_2 تقریبی از عدد A و دارای ارقام بامعنی درست یکسان باشند کدام یک تقریب بهتری

را می‌دهد؟

۲.۱ تقریب یک عدد و اندازه خطای آن

۱.۲.۱ تقریب یک عدد

اعداد زیر تا ۴ رقم بعد از اعشار گرد شده‌اند:

- الف) $A = ۲/۰۰۳۴۲۵۱$, $۰/۲۵۱ < ۰/۵$, $a = ۲/۰۰۳۴$,
 ب) $A = -۲/۰۰۳۹۸۵۱$, $۰/۸۵۱ > ۰/۵$, $a = -۲/۰۰۴۰$,
 ج) $A = ۲/۰۰۳۴۵۰۰$, $۰/۵۰۰ = ۰/۵$, $b_۴ = ۴$ زوج, $a = ۲/۰۰۳۴$,
 د) $A = ۲/۰۰۳۷۵۰۰$, $۰/۵۰۰ = ۰/۵$, $b_۴ = ۷$ فرد, $a = ۲/۰۰۳۸$.

اگر a گردشده عدد A تا n رقم اعشار باشد، آنگاه

$$|A - a| \leq ۰/۵ \times ۱۰^{-n}. \quad (۳.۱)$$

۲.۲.۱ خطای تقریب

تعریف ۴

فرض کنیم a تقریب عدد A باشد. آنگاه $e(a) := |A - a|$ را **خطای مطلق** و $\delta(a) := \frac{e(a)}{|A|} = \frac{|A - a|}{|A|}$ را **خطای نسبی** می‌نامند.

(قضیه انتشار خطا) اگر a و b به ترتیب تقریب‌هایی از A و B و همه این اعداد مثبت باشند، آنگاه:

$$e(a \pm b) \leq e(a) + e(b), \quad (\text{الف})$$